Chapitre Premier

Intégrale Généralisée

La notion d'intégrale de Riemann a été introduite dans le cadre des fonctions bornées définies sur un intervalle fermé borné. L'objet de ce chapitre est d'étendre cette notion par "passage à la limite" au cas des fonctions définie sur un intervalle non-borné ou des fonctions non-bornées.

1.1 Rappels sur les limites

Définition 1.1.1 *Lorsque F est une fonction de $[a, +\infty[$ (resp $]-\infty, a]$) dans $\mathbb{R}$, on dit que F tend vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe un réel L qui possède la propriété suivante :*
Pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 > a$ (rep. $x_0 \leq a$) tel que, pour chaque $x > x_0$ (rep. $x \leq x_0$) , on a $|L - F(x)| \leq \varepsilon$.

Remarque 1.1.1 *Le nombre L est unique et $L = \lim_{x\to+\infty} F(x)$ (rep. $L = \lim_{x\to-\infty} F(x)$)*

Théorème 1.1.1 *Soit F une fonction de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Si F est croissante majorée (resp. décroissante minorée) alors F tend vers $\sup_{x\geq a} F(x)$ (rep. $\inf_{x\geq a} F(x)$).*

Théorème 1.1.2 *Soient λ un réel, F et G deux fonctions de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ possedant chacune une limite finie quand $x \to +\infty$. Alors*

i) $\lim_{x\to+\infty}(\lambda F(x) + G(x))$ *existe et est finie ; on a*

$$\lim_{x\to+\infty}(\lambda F(x) + G(x)) = \lambda \lim_{x\to+\infty} F(x) + \lim_{x\to+\infty} G(x)$$

ii) s'il existe $b > a$ tel que $\forall x \geq b$, $F(x) \leq G(x)$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \leq \lim_{x\to+\infty} G(x)$$

Critère de Cauchy : Soit F une fonction de $[a, +\infty]$ dans $\mathbb{R}$; alors F possède une limite finie quand $x \to +\infty$ si, et seulement si, pour chaque réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $x_0 \geq a$ tel que $x, y \geq x_0$. On a $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$.

Définition 1.1.2 *(fonction continue par morceau)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit qu'une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est continue par morceau s'il existe une subdivision $t_0 = a < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1$ de $[a, b]$ telle que f est continue sur chacun des intervalles $]t_{i-1}, t_i[$ $(1 \leq i < N)$, f possède une limite à droite finie et une limite à gauche finie en chaque point t_k pour $1 \leq k \leq N-1$, une limite à droite finie en a et une limite à gauche finie en b.

Exemple 1.1.1 *La fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x = 1/2 \\ 2x + 1 & si \quad 0 < x < 1/2 \\ -x & si \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

est continue par morceaux.

1.2 Prémière généralisation : intervalle d'intégration non-borné

Notons f, g et h,... des fonctions définies sur $[a, +\infty[$ et à valeurs réelles.
On suppose que $\forall b > a$ les fonctions sont continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$.
On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathcal{C}^{(1)}([a, +\infty[) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{(1)}([a, +\infty[) \\ & & f & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

Définition 1.2.1 *On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si la fonction associée F tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Dans ce cas on note :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Cette limite est appelée l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)dt$ n'existe pas, elle n'est pas convergente ; alors elle diverge. Lorsque $F \to +\infty$ (ou $-\infty$), on écrit

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty \quad ou \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt = -\infty.$$

Proposition 1.2.1 *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g *deux fonctions de* $[a, +\infty[$ *dont les intégrales* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ *sont convergentes. Alors :*

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t))dt$ *est convergente et*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

b) si $\forall t \geq a, \quad f(t) \leq g(t) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt.$

Exemple 1.2.1 *Etudier, en fonction du réel* α, *de la convergence de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. *La fonction qui est sous le symbole d'intégration est continue. Soit* x *un réel* ≥ 1. *Nous avons*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} Log\ x & si \quad \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right] & si \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

il s'ensuit que :

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si* $\alpha > 1$ *et dans ce cas* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$,

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *diverge si* $\alpha \leq 1$.

Théorème 1.2.1 *Si* f ; $[a, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$. *Alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si, et seulement si, la fonction associée* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *est majorée.*

Preuve

On constate que la fonction f ne prend que des valeurs positives ; alors F est croissante. Puis on utilise le théorème sur l'exsitence des limites pour les fonctions monotones bornées. $\square$.

L'une des méthodes utilisées pour étudier la convergence d'une intégrale consiste à comparer la fonction considérée à une fonction connue.

Théorème 1.2.2 *Si* $f, g \ : \ [a, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *telles que* $\forall t \geq a$, *on a* $f(t) \leq g(t)$ *implique que si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \quad diverge \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt \quad diverge.$$

Preuve
On a évidemment, $\forall x \geq a$, $\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$. Cette dernière fonction étant majorée, la fonction F l'est aussi. $\square$.

Théorème 1.2.3 *Si $f, g \;:\; [a, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telles que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.*

Preuve
Les deux fonctions f et g étant équivalentes au voisinage de $+\infty$, il existe un réel $b \geq a$ et une fonction $\varepsilon \;:\; [b, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ telle que, pour chaque $t \geq b$, on $f(t) = (1 + \varepsilon(t))g(t)$. On pourra alors trouver un réel $c \geq b$ tel que pour $t \geq c$,on a $|\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}$. Il est alors clair que, sous la même condition,

$$\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t).$$

On conclut en utilisant le théorème précédent. $\square$.

<u>Critère de Cauchy pour la convergence des intégrales :</u> Soit $f \;:\; [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. $\int_a^{+\infty} f(x)dt$ converge si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \geq a$ tel que $\forall x, y \geq x_0$, on a $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$.

Exemple 1.2.2 *Etude de la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} cos(t^2)dt$.*
La fonction qui est sous le signe d'intégration est continue. Nous allons appliquer le critère de Cauchy pour les intégrales. Soient $0 < x < y$, nous avons, en effectuant le chagement de variable associé à la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie pour tout réel $u > 0$ par $\psi(u) = \sqrt{u}$, puis une intégration par parties

$$\int_x^y cos(t^2)dt = \int_{x^2}^{y^2} \frac{cos\ u}{2\sqrt{u}}du = \frac{sin(y^2)}{2y} - \frac{sin(x^2)}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{y^2} \frac{sin\ u}{u^{\frac{3}{2}}}du$$

donc

$$\left|\int_x^y cos(t^2)dt\right| \leq \frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{y^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{y^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

On conclut en utilisant le critère de Cauchy de convergence des intégrales.

Définition 1.2.2 *$f \;:\; [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.*

Théorème 1.2.4 *f : $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|dt$$

Preuve
Soient $a \leq x \leq y$. Nous avons

$$\left|\int_x^{y} f(t)dt\right| \leq \int_x^{y} |f(t)|dt.$$

Puisque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, étant donné un réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $x_0 \geq a$ tel que, pour chaque $x_0 \leq x \leq y$, on a

$$\int_x^{y} |f(t)|\, dt \leq \varepsilon \text{ donc } \left|\int_x^{y} f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

$\square$.

Définition 1.2.3 *Lorsque $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge sans être absolument convergente, on dit qu'elle est* **semi-convergente**.

Exemple 1.2.3 *L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin\ t}{t}dt$ est semi-convergente.*

Théorème 1.2.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$f, g \in \mathcal{C}^{(1)}([a,+\infty[)$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(t)^2 dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} (g(t))^2 dt$ soient convergentes. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est absolument convergente et

$$\int_a^{+\infty} |f(t)g(t)|\, dt \leq \left[\int_a^{+\infty} (f(t))^2 dt\right]^{1/2} \left[\int_a^{+\infty} (g(t)^2 dt\right]^{1/2}$$

1.3 Deuxième généralisation : intégrale des fonctions non-bornées

Définition 1.3.1 *Soit f $]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} f(t)dt$ est convergente (ou bien converge) si la fonction F définie sur $]a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{b} f(t)dt$ tend vers une limite finie quand x tend vers a.*

Le nombre $\lim_{x \to a} \int_a^b f(t)dt$ *est appelé* **l'intégrale de** f **sur** $]a, b]$. *Une intégrale non convergente est dite divergente.* $\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente si* $\int_a^b |f(t)|dt$ *est convergente. Une intégrale qui est convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemple 1.3.1 *Pour chaque réel* α *la fonction qui, à chaque réel* $t \in]0, 1]$, *associe* $\frac{1}{t^\alpha}$ *est continue sur* $]0, 1]$. *Sa primitive est la fonction* $\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ *si* $\alpha \neq 1$ *et Log* t *si* $\alpha = 1$. *On déduit alors que*

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge, si et seulement si,} \quad \alpha < 1.$$

Remarque 1.3.1 *a) Lorsque* f *est bornée sur l'intervalle* $]a, b]$, *l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*

b) La nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ *ne depend que du comportement de la fonction* f *au voisinage de* a.
$\forall c \in]a, b]$, *l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si, et seulement si, l'intégrale* $\int_a^c f(t)dt$ *converge.*

Théorème 1.3.1 $f, g \; :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b f(t)dt$ *convergent. Alors* $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))dt$ *converge et*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Théorème 1.3.2 *Soit* $f \; :]a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$. *Alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si, et seulement si,* $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ *est majorée.*

Preuve
La décroissance de la fonction F mène à la conclusion. □

Théorème 1.3.3 *Soient* $f, g \; :]a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$ *telles que* $\forall t \in]a, b]$, *on a* $f(t) \leq g(t)$. *Alors,* $\int_a^b g(t)dt$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^b g(t)dt$ *converge.*

Preuve
Pour chaque $x \in]a, b]$,

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \leq G(x) = \int_x^b g(t)dt.$$

La fonction G étant majorée par hypothèse il s'ensuit que la fonction F est, elle aussi, majorée d'où la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. $\square$.
Ce théorème montre que les intégrales de deux fonctions équivalentes au voisinage de a qui gardent un signe constant sont de même nature.

Théorème 1.3.4 *$f, g\ :]a, b] \to [0, +\infty[$ telles que $f \sim g$ quand ($x \to a$). Alors*

$$\int_a^b f(t)dt \quad converge \;\Leftrightarrow\; \int_a^b g(t)dt \quad converge.$$

Exemple 1.3.2 *Etude de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}$. La fonction qui est sous le signe d'intégration est continue sur $]0, 1]$ et ne prend évidemment que des valeurs ≥ 0. On a*

$$\frac{1}{\sqrt{t(1+t^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t \to 0).$$

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ entraine la convergence de l'intégrale considérée.

(**Critère de Cauchy pour la convergence des intégrales**)
Si f est définie sur $]a, b]$; $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in]a, b]$ tel que $\forall x, y$ vérifiant $a < x < y \leq x_0 \Longrightarrow \left|\int_x^y f(y)dt\right| \leq \varepsilon$

Théorème 1.3.5 *Soit f une fonction définie sur $]a, b]$. Alors, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b (f(t))dt$ converge et*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Définition 1.3.2 *Soit f une fonction définie sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente. Une intégrale qui est convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente.*

Théorème 1.3.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions définies sur $]a,b]$ telles que $\int_a^b (f(t))^2dt$ *et* $\int_a^b (f(t))^2dt$ *soient convergentes, alors* $\int_a^b f(t)g(t)dt$ *est absolument convergente et*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \left[\int_a^b (f(t))^2dt\right]^{1/2} \left[\int_a^b (g(t))^2dt\right]^{1/2}$$

Définition 1.3.3 *Lorsque f est une fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$, continue par morceaux sur chaque intervalle $[a,b]$, on dit que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si, pour un réel c, les deux intégrales* $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ *et* $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ *sont simultanémént convergentes.*

Exemple 1.3.3 *L'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *est convergente.*

Définition 1.3.4 *Lorsque f est une fonction définie sur $]a,+\infty[$, continue par morceaux sur chaque intervalle $[x,y]$, $(a < x \leq y < \infty)$ on dit que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si, pour tout réels $c \in]a,+\infty[$, les deux intégrales* $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ *sont simultanément convergentes.*

Exemple 1.3.4 *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ *est convergente.*

Définition 1.3.5 *soit f une fonction définie sur $]a,b[$, continue par morceaux sur chaque intervalle $[x,y]$, ($a < x \leq y < b$) on dit que* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si, et seulement si, $\forall c \in]a,b]$,* $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *sont simultanement convergentes.*

Exemple 1.3.5 *L'intégrale* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ *est convergente.*

Exemple 1.3.6 (Fonction Gamma Γ)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Si $\alpha \geq 1$, la fonction $t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.*

- $\cdot$ *Si* $0 < \alpha < 1$, *la fonction* $t^{\alpha-1}e^{-t}$ *est définie et continue sur* $]0, +\infty[$ *et* $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ *au voisinage de 0 avec* $1 - \alpha < 1$.

Donc $\forall \alpha > 0$ *et* $\forall a > 0$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^a t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ *existe soit comme une intégrale de Riemann ordinaire lorsque* $\alpha \geq 1$, *soit comme une intégrale généralisée lorsque* $0 < \alpha < 1$.
On a $t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} \longrightarrow 0$ *au voisinage de* $+\infty \Longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ *converge car* $\exists c \in]0, +\infty[$ *tel que* $\forall t \geq c$, $t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} < 1 \Longrightarrow \quad t^{\alpha-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2} \Longrightarrow \displaystyle\int_c^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt < \int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *et qui est convergente.*

Remarques 1.3.1

- *Pour chaque réel* $\alpha > 0$ *on a* $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$.
- *Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a* $\Gamma(n) = (n - 1)!$.